王文素与我国古代音乐中的“五音十二律”

潘红丽　潘有发

关于我国古代音乐中的五音十二律，《管子》卷十九“地员”注①、刘安(约公元前200年—122年)《淮南鸿列解》卷三“天文训”，司马迁(公元前145—87)《史记·律书》班固(32—92)《汉书·律历志》等书中都有很详细地记载。

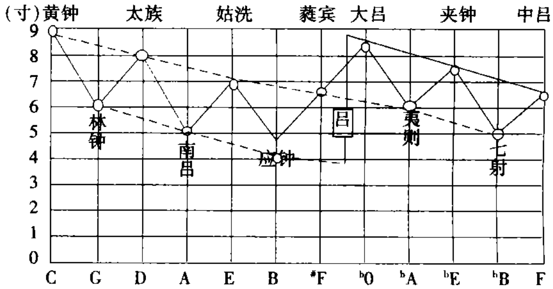
《汉书·律历志》记载着一个黄帝制十二律的历史典故。说黄帝命他的臣子泠纶(língiún)自西域大夏国之西昆仑山之背阳坡沟谷中取其壁薄厚均匀的竹子，断成两节，间而吹之，以为黄钟之宫。制成12个竹筒，以听凤凰鸟的鸣叫声。其雄鸟鸣声为六，雌鸟亦鸣声为六，以此比喻黄钟之宫，可以生十二律，是为律之本。

《汉书·律历志》说：“五声之本，生于黄钟之律。九寸为宫，或损或盉。以定商、角、徵(zhì)、羽。九六相生，阴阳之本也。律十有二，阳六为“律”，阴六为“吕”。律以统气类物，一曰黄钟，二曰太族注②、三曰姑洗，四曰蕤(ruì)宾，五日夷则，六曰亡射(wúyi，亦作无斁)注③，吕以旅阳宣气，一曰林钟，二曰南吕，三曰应钟，四曰大吕，五曰夹钟，六曰中(zhòng)注④吕。

五声，亦称五音。是我国古代五声音级上的五个音级最早见于《玉篇》前《五音声论》。相当于现在音谱上的1、2、3、4、5、6，古时叫做宫、商、角、徵、羽，唐代以后叫合、四、乙、尺、工。各相邻两音间的音程，除角与徵、羽与宫(高八度的宫)之间为小三度外，其余均为大二度。

十二律，本是我国古代传统的律制，是将一个八度分为十二个不完全相等的半音的一种律制。各律从低到高，依次为黄钟、大吕、太族、夹钟、姑洗、中吕、蕤宾、林钟、夷则、南吕、亡射、应钟。又奇数各律称为“律”，偶数各律称为“吕”，总称“六律”、“六吕”，简称“律吕”，十二律有时又叫“正律”，其高八度各律叫“半律(清宫)”，低八度各律叫“倍律(浊宫)”《汉书·律历志》说：“黄钟为天统，律长九寸，”“林钟为地统，律长六寸，”“太族为人统，律长八寸。”《汉书·律历志》详细介绍了用三分损益法求十二律各管长度的方法：

“则黄钟之长也，三分损一，下生林钟；三分林钟盖一，上生太族；三分太族损一，下生南吕；三分南吕益一，上生姑洗；三分姑洗损一，下生应钟；三分应钟益一，上生蕤宾；三分蕤宾损一，下生大吕；三分大吕益一，上生夷则；三分夷则损一，下生夹钟；三分夹钟益一，上生亡射；三分亡射损一，下生中吕。阴阳相生，自黄钟始而左旋。”这是说，假令黄钟管长9寸，三分损一(去掉$\frac{1}{3}$)，下生林钟管长为：$9\times(1-\frac{1}{3})=9\times\frac{2}{3}=6$寸，林钟“三分益一(加$\frac{1}{3}$)”，可以得太族管长为：$6\times(1+\frac{1}{3})=6\times\frac{4}{3}=8$寸，也就是$9\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=9\times\frac{2^3}{3^2}=8$寸，依此法继续下去，可以求得最后一个管长中吕为：$9\times\frac{2^{17}}{3^{11}}=6.659$寸。如下图：



这样连续四次可以得到五根长度不同的管子，吹出古代常用的五个音：宫、商、角、徵、羽。如果使第一根管黄钟长为81($=9^2=3^4$)，按三分损益法，可得五根管长都是整数：81，54，72，48，64。《史记·律书》说明这个方法：“九九八十一以为宫，三分去一，五十四以为徵；三分益一，七十二以为商；三分去一，四十八以为羽；三分益一，六十四以为角。”“故曰音始于宫，穷于角。”

这样继续下去，可以得到十二律。要保持三分损益后所得十二律都是整数，可以假设第一根管长为$3^{11}=177147$，这种理论，首见于刘安《淮南鸿烈解》卷三《天文训》：“故黄钟之律九寸，而宫音调，因而九之，九九八十一，故黄钟之数立焉。……律之数六，分为雄雌。故曰十二钟，副以十二月。十二各以三成，故

置一而十一、三之为积分十七万七千一百四十七，黄钟大数立焉。凡十二律，黄钟为宫，太蔟为商，姑洗为角，林钟为徵，南吕为羽。""故音以八生，黄钟为宫……其数八十一，主十一月；下生林钟，林钟（徵）之数五十四，主六月；上生太蔟，太蔟（商）之数七十二，主正月；下生南吕，南吕（羽）之数四十八，主八月，上生姑洗，姑洗（角）之数六十四，主三月。……"

《汉书·律历志》说："行于十二辰，始动于子。三之于丑，得三；又三之于寅，得九；又三之于卯，得二十七；又三之于辰，得八十一；……又三之于亥，得十七万七千一百四十七。"

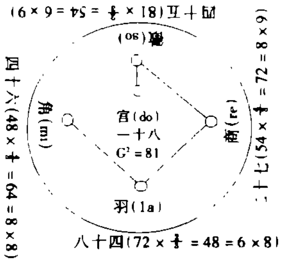
这意思是说，黄钟音律的管长为 9 寸，它的音调叫"宫"，用 9 乘之。得 81，叫"黄钟之数"。十二律的每一个律是根据三分损益的原则制成的，所以将 1 乘 3 的十一次（即 1×3^{11}），而得到积分管长为：$1\times3^{11}=177147$，此数称为"黄钟大数"，以别于"黄钟数 81"。

《汉书·律历志》又说："故因元一而九、三之以为法（1×3^{9}），十一、三之以为实（3^{11}），实如法得一（$\frac{3^{11}}{3^{9}}=9$），黄钟初九，律之首，阳之变也。因而六之，以九为法，得林钟初六（以六乘黄钟之九，得五十四），吕之首，阴之变也。""六律六吕，而十二辰立矣；五声清浊，而十日行矣。"

王文素对我国古代音乐中传统五音十二律很有研究，他在《算学宝鉴》（1524 年）卷首之图中，各用一图一诗十分简练地说明了五音十二律的计算方法：

①五音：　　　　诗曰：

五音相生图



黄钟九九起宫音，
从此三注⑤归损一吟。
六九逢之为徵火注⑥，
三分益一属商注⑦金。
商注⑧居八九还生羽，
羽水流传六八侵。
复注⑧以三分而益一，
角音八八细搜寻。

此歌是对五音相生图的具体说明。置黄钟长 9 寸，$9^2=81$　为宫音，此即"黄钟九九起宫音"

从此三归损一吟：$81\times(1-\frac{1}{3})=81\times\frac{2}{3}=54=6\times9$，此即"六九逢之为徵火"

三分益一属商金：$54\times(1+\frac{1}{3})=54\times\frac{4}{3}=72=8\times9$ 此即

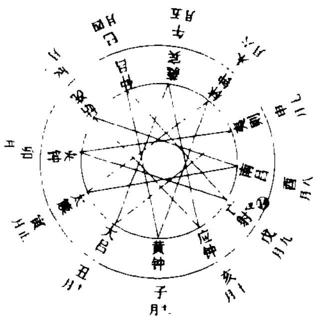
商居八九还生羽：$72\times(1-\frac{1}{3})=72\times\frac{2}{3}=48=6\times8$，此即"羽水流传六八侵。"

复以三分而益一：$48\times(1+\frac{1}{3})=48\times\frac{4}{3}=64=8\times8=$，此即"角音八八细搜寻。"

此乃五音相生，多者为尊浊注⑨，少者为单清也。二因三归为损，是注⑩减其数也；四月三归为益，是增益其数也。

律吕相生图

②十二律　　　　诗曰：



太乙注⑪三之九遍乘，
重张下位再三因。
实如法得初阳力，
隔八相乘损益生。
阳上四乘阴下二，
并如三法注⑫敛形声。
上生不及注⑬黄钟浊，
下损生之不过清。

此歌诀是对"律吕相生图"的具体说明。大意是说，在算盘上，先置一，乘以 3^9 为法数，再乘以 3^2、$3^9=3^{11}$ 为实数，以法除实，首先得：$\frac{3^{11}}{3^{9}}=3^2=9$ 寸为黄钟。二因三归（即三分损一）得林钟 6 寸，向左旋转八位，由于至未；再四因三归（即三分益一）得太族 8 寸，继续向左旋转八位，由未至寅……这样继续下去，以此法损益，最后至亥。上生用四因，下损用二因，不论二因四因，都以"三"为"法数"。上生各律不及黄钟浊，下损各律也不能超过"清"。

又黄钟、林钟、太族律皆全寸（整数寸），各得三分为一统也。

$1\times3=3$　南吕

$1\times3\times3=3^2=9$　姑洗

$1\times3^2\times3=3^3=27$　应钟

$1\times3^3\times3=3^4=81$　蕤宾

$1\times3^4\times3=3^5=243$　大吕注⑮

$1\times3^5\times3=3^6=729$　夷则

$1\times3^6\times3=3^7=2187$　夹钟

$1\times3^7\times3=3^8=6561$　亡射

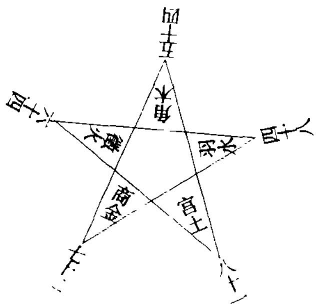
$1\times3^8\times3=3^9=19683$ 中吕（此即"太乙三之九遍乘"之意）

又　$1\times3^9\times3^2=3^{11}=177147$

通过上述简单分析，我们可以看出，王文素在数学史与音乐史上，通过五音十二律这个友谊的桥梁，首次使音乐与数学有机的结合为一体，王文素的图

解诗词，高度概括了《淮南鸿烈解·天文训》、《史记·律书》、《汉书·律历志》中有关五音十二律的计算法则。王文素的图解诗词，是符合《汉书·律历志》的本意的，使五音十二律及三分损益法更加通俗化、大众化，这样更有利于广大人民群众理解掌握我国古代传统的“五音十二律”及“三分损益法”，推动音乐与数学的发展。王文素的这一成就，在音乐与数学发展史上，起了一定的积极作用，占有一定的地位。公元1592年程大位在《算法统宗》卷十七杂法中，提出类似于王文素《算学宝鉴》五音十二律的图解和诗词如下：

五音相生图

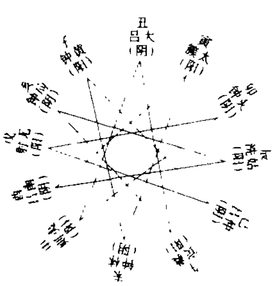


诗曰：

黄钟九九起宫音，
寻此三分损一寻。
六九逢之生徵火，
三分益一属商金。
商居八九还生羽，
羽水传流六八侵。
复以三分而益一，
角音八八妙通神

诗间与王文素基本相同，图则有所改变，可能是受到王文素律吕相生图的启示。

律吕相生图



诗曰：

律吕相生识者稀，
黄钟九寸是根基。
隔八生阴三损一，
阴律生阳益一奇。
黄林太簇皆全寸，
余者通之更不疑。
俱用九分乘见积，
四时气候配攸宜。

图与王文素基本相同，诗句内容也一致。这已在王文素之后68年！

注：①《管子·地员篇》首次提出“四开以合九九，以是生黄钟，小素之音以成宫　三分而益之以一，为百八为徵。”此即 $3^4=9\times9=81$ 为黄钟，三分益一，得徵为108，用的是“三分益损法”与《淮南鸿烈解·天文训》、《史记·律书》、《汉书·律历志》中的“三分损益法”不同。

②《淮南鸿烈解·天文训》、《史记·律书》作“蔟”。

③《淮南鸿烈解·天文训》、《史记·律书》作“无射”。

④《淮南鸿烈解·天文训》、《史记·律书》作“仲”。

⑤“三”原误为“二”，今改。

⑥“火”原误为“大”，系形近而误，依程大位《算法统宗》改。

⑦“商”原误为“商”，系形近而误，今改。

⑧“复”原误为“復”，今改。

⑨“浊”原误为“独”，系形近而误，今改。

⑩“是”原误为“足”，系形近而误，今改。

⑪太乙：即“太一”

⑫并如三法：以三为法数

⑬不及：原误为“不皮”，系形近而误，今改。

⑭图中“亡”误为“鱼”，今改。

⑮此条原文脱落，今补。

主要参考资料

1. 管子》卷十九“地员”，《百子全书》本，浙江人民出版社。

2.《淮南鸿烈解·天文训》，《百子全书》本，浙江人民出版社。

3. 司马迁《史记》卷25《律书》，中华书局，1959年9月

4. 班固《汉书·律历志》中华书局1962年6月

5. 王文素《算学宝鉴》、任继愈主编《中国科学技术典籍通汇》中郭书春主编的《数岸卷》，河南教育出版社1993年6月

6. 程大位《算法统宗》，版本同前条。梅荣照、李兆华《算法统宗校释》安徽教育出版社，1990年10月

7.《辞海》P32五音、P14十二律、上海辞书出版社，1980年8月

作者单位：黑龙江克山县财政局　161600

收稿日期：2001—02—08